Tecniche di scomposizione in fattori dei polinomi

Dato un polinomio, è possibile studiare se può esser scritto come il prodotto di più polinomi più semplici. Per far ciò, è necessario seguire le varie regole **nel seguente ordine**:

1. Effettuare un raccoglimento a fattor comune totale

Se tutti i termini del polinomio possiedono uno o più fattori in comune, tali fattori si possono scrivere una sola volta, e possono esser moltiplicare per il polinomio ridotto[1]. Esempi:

- **I.** $a x^2+b^3 x-a^2 b x \;=\; x\cdot(a x+b^3-a^2 b)$
- **II.** $4 a^2 b c^4-10 b^3 c^2-6 a^3 b^3 c^2+12 a b^2 c^3 \;=\; 2 b c^2\cdot(2 a^2 c^2-5 b^2-3 a^3 b^2+6 a b c)$
- **III.** $24 x^6 y^5 z^{10}-30 x^2 y^4 z^7 \;=\; 6 x^2 y^4 z^7\cdot(4 x^4 y z^3-5)$

2. Studiare, a seconda del numero di termini, la presenza di scomposizioni particolari

a) Binomi

- **I.** Differenza di due quadrati $A^2-B^2 \;=\; (A+B)\cdot(A-B)$
- **II.** Somma di due cubi $A^3+B^3 \;=\; (A+B)\cdot(A^2-AB+B^2)$
- **III.** Differenza di due cubi $A^3-B^3 \;=\; (A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)$
- **IV.** Somma di due quadrati A^2+B^2 non si può scomporre!!!

b) Trinomi

- **I.** Quadrato di un binomio (termini concordi) $A^2+2AB+B^2 \;=\; (A+B)^2$
- **II.** Quadrato di un binomio (termini discordi) $A^2-2AB+B^2 \;=\; (A-B)^2$
- **III.** Falso quadrato (termini concordi) A^2+AB+B^2 non si può scomporre!!!
- **IV.** Falso quadrato (termini discordi) A^2-AB+B^2 non si può scomporre!!!
- **V.** Trinomio speciale (somma e prodotto) $x^2+sx+p \;=\; x^2+(a+b)x+(a\cdot b) \;=\; (x+a)\cdot(x+b)$

c) Quadrinomi

- **I.** Raccoglimento a fattor parziale $Ax+Bx+Ay+By \;=\; (A+B)\cdot(x+y)$
- **II.** Cubo di un binomio (termini concordi) $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 \;=\; (A+B)^3$
- **III.** Cubo di un binomio (termini discordi) $A^3-3A^2B+3AB^2-B^3 \;=\; (A-B)^3$

d) Altri casi

- **I.** Quadrato di un trinomio $A^2+B^2+C^2\pm 2AB\pm 2BC\pm 2AC \;=\; (A\pm B\pm C)^2$
- **II.** Scomposizioni miste (in un polinomio generico si possono combinare le varie scomposizioni)

$$xA^2+xB^2+2xAB+yA^2-yB^2 \;=\; x(A+B)^2+y(A+B)(A-B) \;=\; (A+B)\cdot(Ax+Bx+Ay-By)$$

3. Applicare il teorema e la regola di Ruffini

a) Ricerca degli zeri[2]

- **I.** Analizziamo il polinomio P(x) = x^3-2x^2+3x-6
- **II.** Cerchiamo uno zero del polinomio:
  - *P(+1) =* $(1)^3-2(1)^2+3(1)-6 \;=\; -4$ *quindi +1 non è uno zero*
  - *P(−1) =* $(-1)^3-2(-1)^2+3(-1)-6 \;=\; -12$ *quindi −1 non è uno zero*
  - *P(+2) =* $(2)^3-2(2)^2+3(2)-6 \;=\; 0$ *quindi +2* ***è uno zero***

b) Applichiamo la regola di Ruffini

coefficienti del polinomio iniziale →		**1**	**−2**	**3**	**−6**	**← termine noto**
zero trovato →	**2**		**2**	**0**	**6**	**← termini parziali**
coeff. del polinomio quoziente →		**1**	**0**	**3**	**0**	**← resto**

c) Creiamo i fattori del polinomio iniziale

- **I.** Il primo fattore (il divisore) sarà: $x-2$ ottenuto dallo zero che abbiamo trovato;
- **II.** Il secondo fattore (il quoziente) sarà: x^2+3 ottenuto dai coefficienti trovati con la regola;
- **III.** Possiamo scrivere la scomposizione: $x^3-2x^2+3x-6 \;=\; (x-2)\cdot(x^2+3)$

1 *Il **polinomio ridotto** è quello che si ottiene dividendo ogni termine del polinomio per il termine comune*

2 *Uno "**zero**" del polinomio è un numero qualunque che, assegnato all'incognita, rende nullo il polinomio. Generalmente uno zero si trova cercando i divisori del termine noto,*