IL PRINCIPIO DI MASSIMO

- Una funzione u(x) continua su un intervallo chiuso [a, b] assume il valore massimo in un punto di questo intervallo.
- Se inoltre u ha le derivate seconde continue, per ogni punto di massimo relativo $c \in (a, b)$ si ha:

  $u'(c) = 0$

  $u''(c) \leq 0$

- Sia g(x) una funzione limitata, t.c. $u''+g(x)u' > 0$ su (a, b);
  allora u può assumere il suo valore massimo solo nei punti a o b.

❖ **Teorema** – Principio di massimo in dimensione 1

Sia $u \in C^2$ t.c. vale $u''+g(x)u' \geq 0$ in (a, b);
se $u(x) \leq M \; \forall x \in (a, b)$ e $u(c) = M$ per $c \in (a, b)$
allora: $u(x) = M$.

EQUAZIONI DI TIPO ELLITTICO

Sia u: D → **R**, $u \in C^2(D)$, D dominio euclideo n-dimensionale.

- Il ***Laplaciano*** di u è il valore:

$$\Delta(u) = \frac{{}^2 u}{x_1^2} + \frac{{}^2 u}{x_2^2} + \ldots + \frac{{}^2 u}{x_n^2}$$

- Se $\Delta(u) = 0$ su D, u è detta funzione ***armonica***.
- Se $\Delta(u) \geq 0$ su D, u è detta funzione ***subarmonica***.

- Una funzione u t.c. $\Delta(u) \leq 0$ in D può assumere il suo massimo solo su ∂D.

- Il ***Gradiente*** di una funzione scalare v è il vettore dato da:

$$\mathrm{grad}(v) = \frac{v}{x_1}\mathbf{n}_1 + \frac{v}{x_2}\mathbf{n}_2 + \ldots + \frac{v}{x_n}\mathbf{n}_n$$

dove $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_n$ sono i versori normali del piano.

- La ***Divergenza*** di una funzione vettoriale w è il valore:

$$\operatorname{div}(w) = \frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \ldots + \frac{w_n}{x_n}$$

dove $w(x) = (w_1(x), \ldots, w_n(x))$ w_j funzioni scalari.

- $\Delta(u) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u))$

❖ **<u>Teorema</u>** <u>– della media sferica</u>

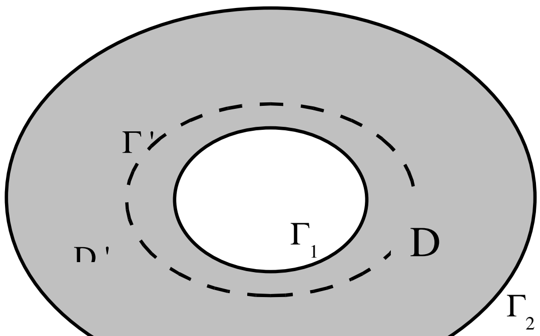
Sia u una funzione <u>armonica</u> su D, dominio di **R²**.
allora $u(\bar{x}, \bar{y})$ è uguale alla media sferica su ogni cerchio interno a D, centrato in (x,y).
Ossia:

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2\pi R}_{C_R} u \;\; ds$$

❖ **<u>Teorema</u>** <u>– principio di massimo</u>

Sia u <u>subarmonica</u> in D.
Se u assume il suo valore massimo M in un qualunque punto di D, allora u = M in D.

<u>APPLICAZIONE : CAPACITÀ ELETTROSTATICA</u>



Sia D un dominio di **R³** la cui frontiera è costituita da due superfici semplici, lisce e chiuse,
$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,
dove Γ_1 è interna a Γ_2.

Sia u una funzione t.c.:
- $\Delta u = 0$ in D
- $u = 1$ su Γ_1
- $u = 0$ su Γ_2

Possiamo interpretare u come il <u>potenziale elettrostatico</u> di un punto P(x, y, z) in D dove supponiamo che vengano mantenuti costanti i potenziali su Γ_1 e Γ_2 .

La <u>carica totale</u> indotta da questa d.d.p. è data da:

$$C(\Gamma_1,\Gamma_2) = -\frac{1}{4\pi}{}_{\Gamma_2}\frac{u}{\mathbf{n}}dS$$

C è detta <u>capacità elettrostatica</u> di D.
Ma essendo:

$${}_{D}\frac{u}{\mathbf{n}}dS = 0$$

allora

$$-\frac{1}{4\pi}{}_{\Gamma_2}\frac{u}{\mathbf{n}}dS = \frac{1}{4\pi}{}_{\Gamma_1}\frac{u}{\mathbf{n}}dS = -\frac{1}{4\pi}{}_{\Gamma_1}\frac{u_1}{\mathbf{n}}dS$$

essendo $u_1 = 1 - u$ su D
Di conseguenza si ottiene la simmetria:

$$C(\Gamma_1,\Gamma_2) = C(\Gamma_2,\Gamma_1)$$