# Studio completo di una funzione e rappresentazione grafica

Studiamo la seguente funzione, affrontando tutti e cinque i passi e parallelamente inserendo i risultati nel piano cartesiano, per poterne disegnare il grafico.

Normalmente il piano cartesiano deve esser disegnato una volta sola, e si arricchisce via via che si svolgono i passi; qui ovviamente ci sono tanti piani cartesiani, sempre più ricchi di informazioni.

Per questioni di spazio, nello svolgimento alcuni calcoli intermedi sono saltati.

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2+3x}$$

## 1. Dominio della funzione

Per prima cosa osserviamo che, essendo una frazione, dobbiamo studiare il denominatore diverso da zero:

$$x^2 + 3x \neq 0$$

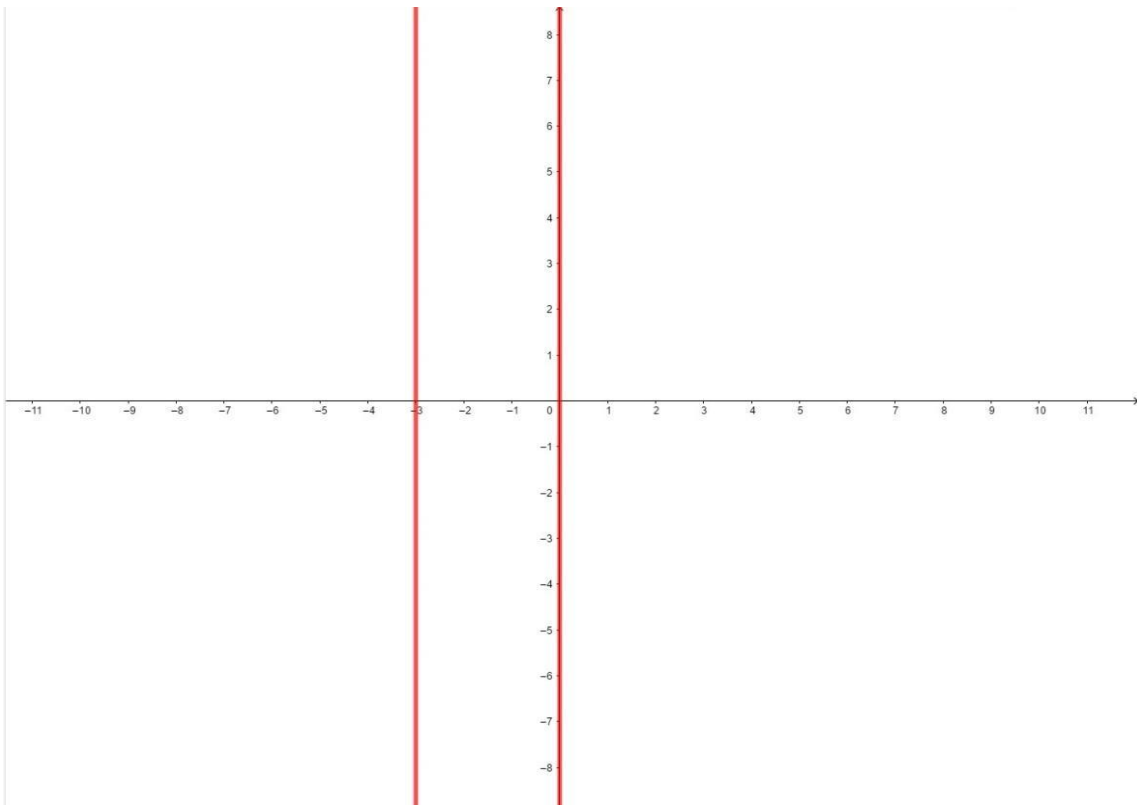
$$x(x + 3) \neq 0$$

$$x \neq 0 \ e \ x \neq -3$$

Scriviamo il Dominio:

$$D = (\forall x \in R : x \neq 0 \ \wedge x \neq -3)$$

Nel piano cartesiano disegniamo due linee verticali intere, una in $x = 0$ (sovrapposta all'asse y) e una in $x = 3$.



## 2. Intersezioni con gli assi

**Intersezione con l'asse x:**

$$\left( y = \frac{1-x}{x^2+3x} \quad y = 0 \right)$$

Sostituendo otteniamo l'equazione fratta:

$$\frac{1-x}{x^2+3x} = 0$$

Che si risolve studiando solo il numeratore (in quanto il denominatore non può esser uguale a zero…)

$$1 - x = 0$$

$$x = 1$$

Quindi abbiamo ottenuto il punto $A(1;\, 0)$

**Intersezione con l'asse y:**

$$\left( y = \frac{1-x}{x^2+3x} \quad x = 0 \right)$$

Ma tale intersezione non può esistere, in quanto il Dominio ci dice che x deve esser diversa da zero e da -3. Quindi non abbiamo intersezioni con l'asse y.

**Conclusione**: nel piano cartesiano disegniamo il punto $A(1;\, 0)$ sull'asse x.

## 3. Segno della funzione

$$\frac{1-x}{x^2+3x} > 0$$

Studiamo separatamente il numeratore e il denominatore (che si scompone in due fattori):

$n$: $1 - x > 0 \rightarrow x < 1$

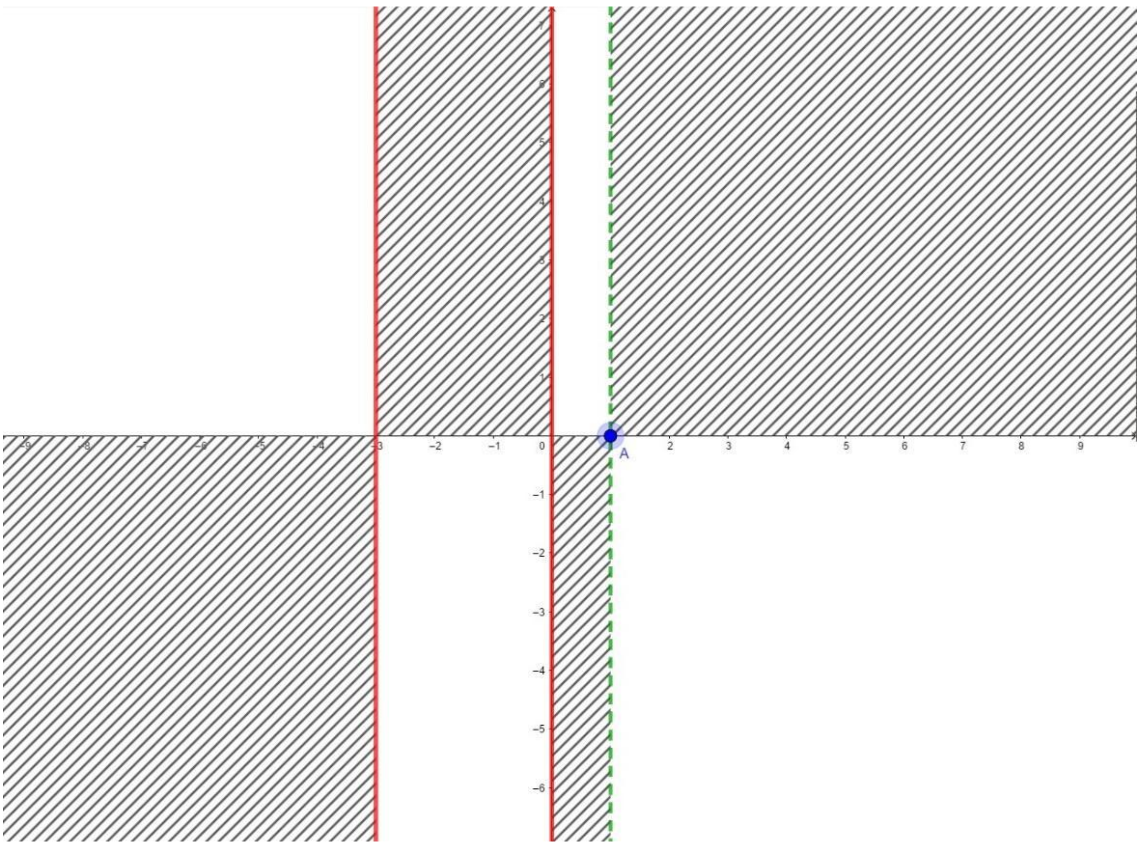
$d_1$: $x > 0$

$d_2$: $x + 3 > 0 \rightarrow x > -3$

Compiliamo la tabella per lo studio del segno:

| | -3 | 0 | 1 | $x$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_1$ | + | + | + | − |
| $d_1$ | − | − | + | + |
| $d_2$ | − | + | + | + |
| $f(x)$ | **+** | **−** | **+** | **−** |

Rappresentiamo quindi il segno e le intersezioni trovate nel piano cartesiano di prima, arricchendo le informazioni presenti:



## 4. Limiti e asintoti

Ricordiamo che il Dominio di questa funzione è $D = (\forall x \in R : x \neq 0 \ \wedge \ x \neq -3)$, quindi i valori estremi del Dominio sono: $-\infty$, $-3$, $0$, $+\infty$. Studiamo i limiti in questi quattro casi:

**Primo limite**: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1-(-\infty)}{(-\infty)^2+3(-\infty)} = \frac{\infty}{+\infty-\infty} \to F.I.$

Questa forma indeterminata si risolve considerando solo i termini di grado maggiore:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x}{x^2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

**Secondo limite**: $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \frac{1-(-3)}{(-3)^2+3(-3)} = \frac{4}{0} = \infty$

Non abbiamo ottenuto forme indeterminate, ma un risultato preciso, quindi il limite è risolto.

**Terzo limite**: $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \frac{1-(0)}{(0)^2+3(0)} = \frac{1}{0} = \infty$

Anche in questo caso non abbiamo ottenuto forme indeterminate, quindi il limite è risolto.

**Quarto limite**: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1-(+\infty)}{(+\infty)^2+3(+\infty)} = \frac{-\infty}{+\infty} \to F.I.$

Questa forma indeterminata si risolve di nuovo considerando solo i termini di grado maggiore:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-x}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

Controlliamo se sono presenti asintoti:

**Nel primo limite** $x \to -\infty$ e il risultato è zero, un numero finito: quindi abbiamo un asintoto orizzontale, di equazione $y = 0$, ossia l'asse x.

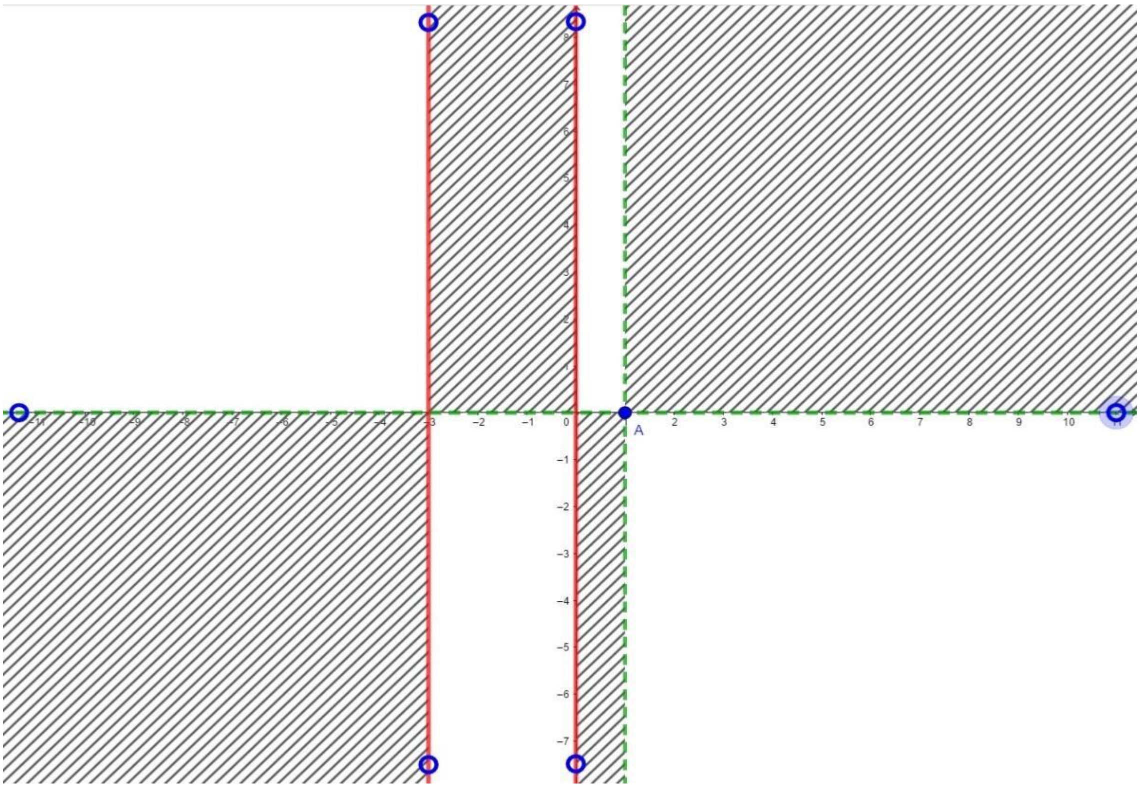
**Nel secondo limite** $x \to -3$ e il risultato è infinito: quindi abbiamo un asintoto verticale, di equazione $x = -3$.

**Nel terzo limite** $x \to 0$ e il risultato è infinito: quindi abbiamo un asintoto verticale, di equazione $x = 0$, ossia l'asse y.

**Nel quarto** limite $x \to +\infty$ e il risultato è zero, un numero finito: quindi abbiamo un asintoto orizzontale, di equazione $y = 0$ (uguale al primo caso).

**Conclusione**: *le due linee verticali che abbiamo disegnato all'inizio per il Dominio, sono anche asintoti verticali. Inoltre l'asse x è un asintoto orizzontale*.

Segniamo gli estremi di queste tre rette come riferimenti per il grafico della funzione (non sono veri e propri punti, ma comunque la funzione passa vicino a loro: sarebbe meglio usare dei trattini invece che dei cerchietti).



## 5. Derivata e punti stazionari

Calcoliamo la funzione derivata; essendo una frazione, dobbiamo applicare la regola del quoziente:

$$D(f(x)) = \frac{(-1)\cdot(x^2+3x)-(1-x)(2x+3)}{(x^2+3x)^2}$$

Facendo i calcoli otteniamo:

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x^2+3x)^2}$$

Questa è la derivata; da questa funzione possiamo trovare i punti stazionari, risolvendo l'equazione:

$$\frac{x^2-2x-3}{(x^2+3x)^2} = 0$$

Come in una normale equazione fratta, studiamo solo il numeratore:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Risolvendo otteniamo le soluzioni: $x = -1$ e $x = +3$; entrambe rispettano le condizioni del Dominio, quindi sono punti stazionari. Troviamo le rispettive y, usando la funzione iniziale:

Se $x = -1$ allora $y = f(-1) = \frac{1-(-1)}{(-1)^2+3(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$ punto $B\,(-1;\ -1)$

Se $x = +3$ allora $y = f(+3) = \frac{1-(+3)}{(+3)^2+3(+3)} = \frac{-2}{18} = \frac{-1}{9}$ punto $C\left(+3;\ -\frac{1}{9}\right)$

Resta ora solo da classificare i punti B e C trovati, facendo lo studio del segno della derivata:

$$\frac{x^2-2x-3}{(x^2+3x)^2} > 0$$

In una disequazione fratta dobbiamo sempre studiare sia il numeratore che il denominatore; il numeratore possiamo scomporlo in fattori:

$$\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3x)^2} > 0$$

Il denominatore, essendo un quadrato, possiamo studiarlo tutto in una volta. Quindi:

$n_1$: $x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$

$n_2$: $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$

$d$: $(x^2 + 3x) > 0 \rightarrow$ *sempre positivo nel Dominio* (*ossia* $\forall x \in D$)

Costruiamo la tabella per lo studio del segno, inserendo anche i valori del Dominio (0 e -3):

-3 -1 0 3 $x$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_1$ | − | − | + | + | + |
| $n_2$ | − | − | − | − | + |
| $d$ | + | + | + | + | |
| $f'(x)$ | **+** | **+** | **−** | **−** | **+** |
| $f(x)$ | ↗ | ↗ | ↘ | ↘ | ↗ |

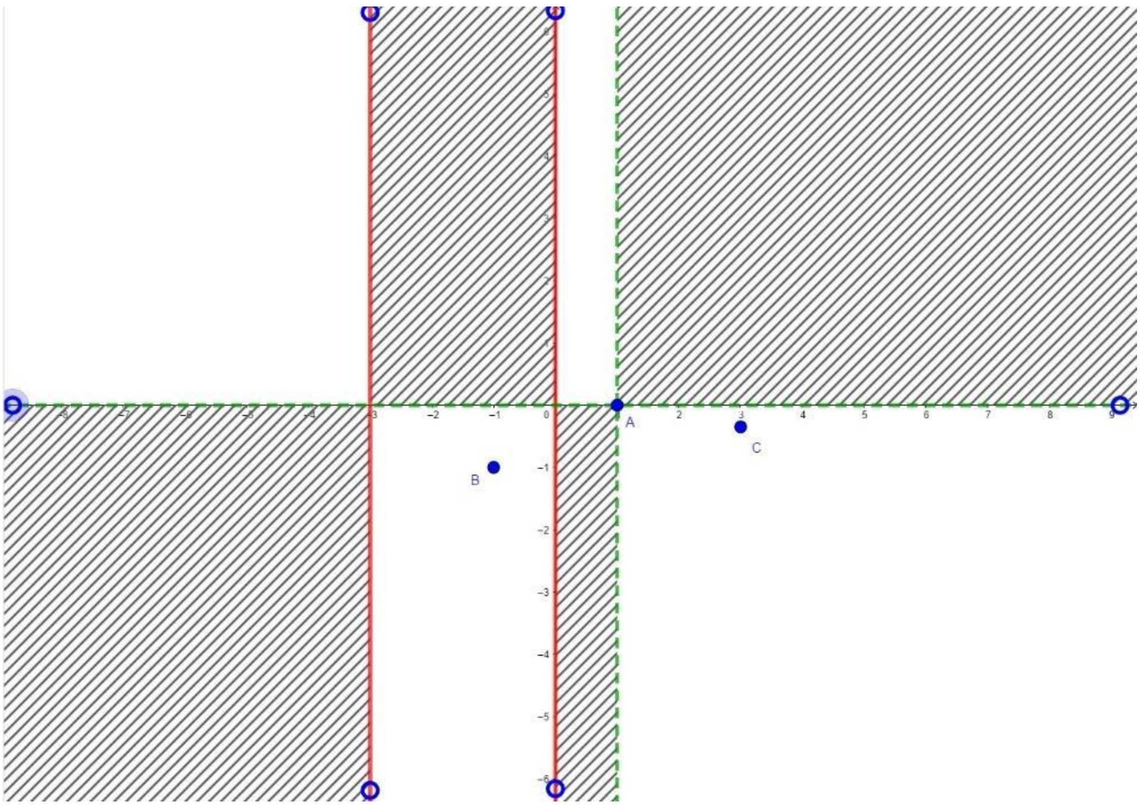
Quindi ora possiamo classificare i punti stazionari trovati:

Prima di -1 la funzione cresce (↗) e dopo di esso decresce (↘). Allora <u>B è un punto di massimo</u>.

Prima di 3 la funzione decresce (↘) e dopo di esso cresce (↗). Allora <u>C è un punto di minimo</u>.

**Conclusione**: *la funzione possiede due punti stazionari: il punto* $B\,(-\,1;-\,1)$ *è un punto di massimo, e il punto* $C\left(+\,3;\quad -\frac{1}{9}\right)$ *è un punto di minimo*.

Inseriamo questi due punti nel piano cartesiano: sono punti normali, come quelli di intersezione.



## 6. Disegno del grafico

A questo punto siamo in grado di disegnare il grafico della funzione; teniamo presente che:

- Le zone cancellate e le linee intere del Dominio (quelle rosse) non devono esser attraversate.
- Le linee verdi tratteggiate possono esser attraversate.
- I punti estremi (i cerchietti) rappresentano punti in cui la funzione inizia o finisce.
- I punti normali rappresentano punti in cui la funzione passa.
- Il punto B è un punto di massimo: quindi nella zona centrale lui sarà il punto più in alto.
- Analogamente C è un punto di minimo: quindi nella zona a destra, C sarà il punto più basso.

Ecco quindi come potrebbe essere il grafico di questa funzione:

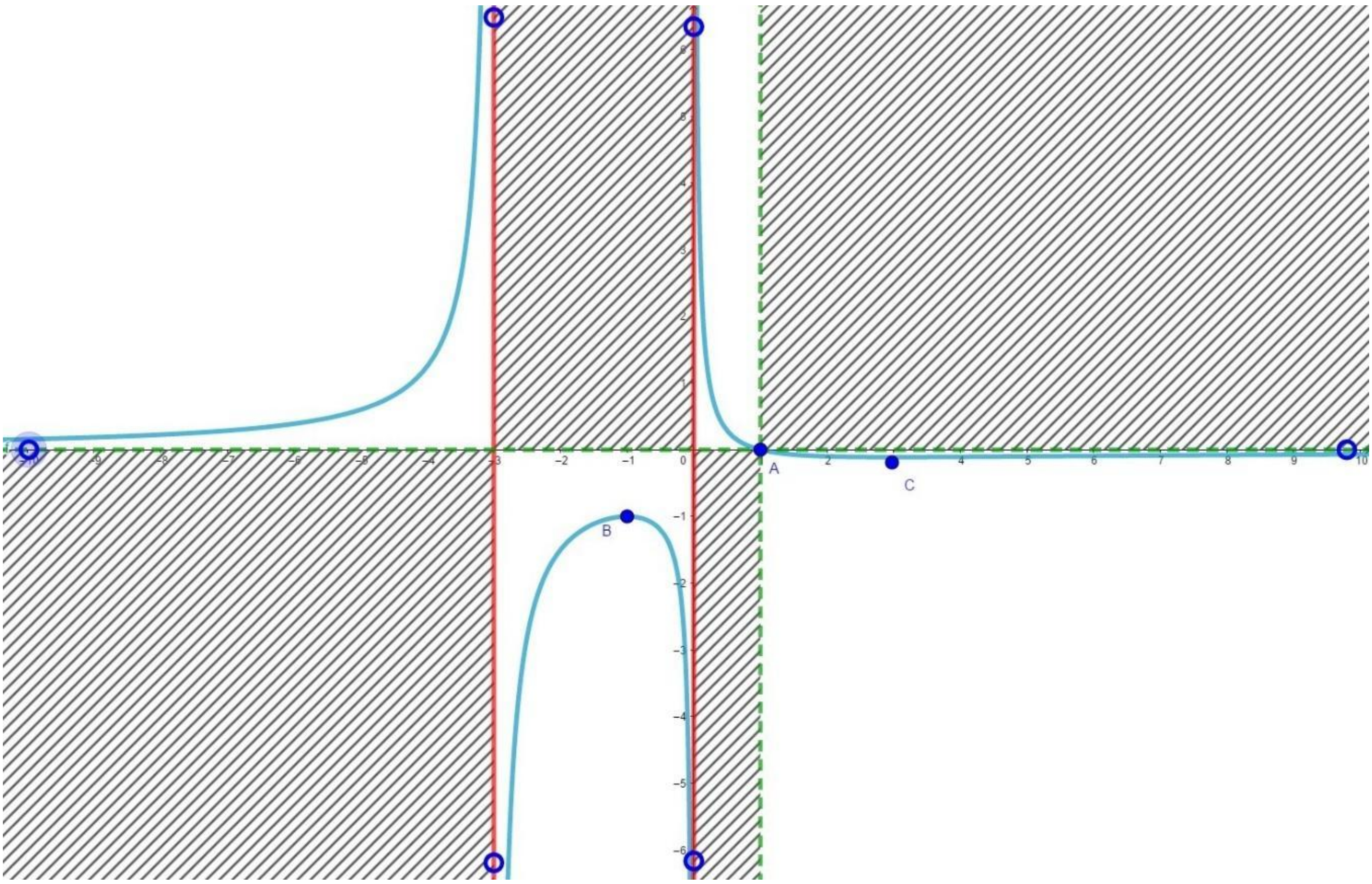



Grafico della funzione $f(x) = \frac{1-x}{x^2+3x}$

Osserviamo che i punti di intersezione e i punti stazionari sono punti precisi in cui passa la funzione, mentre i valori estremi ottenuti con i limiti sono approssimativi e la funzione ci passa vicino.