

Area del segmento parabolico

Vogliamo verificare la formula per calcolare l'area di un segmento parabolico, delimitato da una parabola di equazione $y = p(x) = ax^2 + bx + c$ e una retta secante di equazione $y = r(x) = mx + q$, utilizzando gli integrali definiti e qualche piccolo accorgimento.

1. Confronto nei punti di intersezione

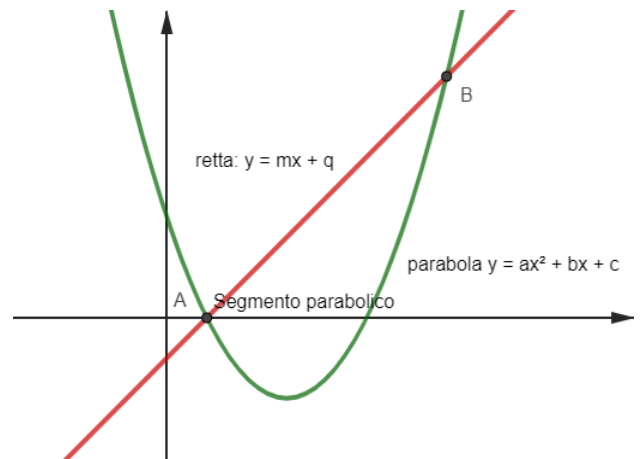
Siano $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ i punti di intersezione tra la parabola e la retta; essendo A e B punti in comune tra le due curve, possiamo confrontare le due immagini:

$$p(x_A) = r(x_A) \quad \text{e} \quad p(x_B) = r(x_B)$$

da cui:

$$ax_A^2 + bx_A + c = mx_A + q$$

$$ax_B^2 + bx_B + c = mx_B + q$$



Primo confronto. Mettiamo a sistema le due equazioni con il metodo di riduzione e svolgiamo la differenza membro a membro. Otteniamo:

$$a(x_B^2 + x_A^2) + b(x_B - x_A) = m(x_B - x_A)$$

$$a(x_B + x_A) + b = m$$

$$\Rightarrow a(x_B + x_A) = m - b \quad (1)$$

Secondo confronto. Mettiamo nuovamente a sistema le due equazioni con il metodo di riduzione, ma questa volta svolgiamo la somma membro a membro. Otteniamo:

$$a(x_B^2 + x_A^2) + b(x_B + x_A) + 2c = m(x_B + x_A) + 2q$$

$$a(x_B^2 + x_A^2) + b(x_B + x_A) - m(x_B + x_A) = 2q - 2c$$

$$\frac{1}{2} [a(x_B^2 + x_A^2) + (b - m)(x_B + x_A)] = q - c$$

Inserendo l'equazione (1) si ottiene:

$$\frac{1}{2} [a(x_B^2 + x_A^2) - a(x_B + x_A)(x_B + x_A)] = q - c$$

$$\frac{1}{2} [a(x_B^2 + x_A^2) - a(x_B + x_A)^2] = q - c$$

$$\frac{1}{2} a [(x_B^2 + x_A^2) - (x_B + x_A)^2] = q - c$$

$$\frac{1}{2} a [-2x_B x_A] = q - c$$

$$\Rightarrow q - c = -ax_B x_A \quad (2)$$

2. Calcolo dell'area con gli integrali

Calcoliamo l'area del segmento parabolico applicando gli integrali definiti:

L'area della regione finita di piano delimitata tra due funzioni corrisponde all'integrale definito della differenza tra le funzioni, calcolato tra le x dei punti di intersezione tra di esse.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{x_A}^{x_B} (r(x) - p(x)) dx = \int_{x_A}^{x_B} (mx + q - ax^2 - bx - c) dx = \\ &= \left[\frac{1}{2}mx^2 + qx - \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}bx^2 - cx \right]_{x_A}^{x_B} = \\ &= \left[\frac{1}{2}m(x_B^2 - x_A^2) + q(x_B - x_A) - \frac{1}{3}a(x_B^3 - x_A^3) - \frac{1}{2}b(x_B^2 - x_A^2) - c(x_B - x_A) \right] = \\ &= \frac{1}{6}(x_B - x_A) \left[3m(x_B + x_A) + 6q - 2a(x_B^2 + x_Bx_A + x_A^2) - 3b(x_B + x_A) - 6c \right] \\ &\Rightarrow \mathcal{A} = \frac{1}{6}(x_B - x_A) \left[3(m - b)(x_B + x_A) + 6(q - c) - 2a(x_B^2 + x_Bx_A + x_A^2) \right] \quad (3)\end{aligned}$$

3. Sintesi

All'interno della formula (3) dell'area del segmento parabolico, inseriamo le equazioni (1) e (2) e semplifichiamo i risultati.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{6}(x_B - x_A) \left[3a(x_B + x_A)(x_B + x_A) + 6(-ax_Bx_A) - 2a(x_B^2 + x_Bx_A + x_A^2) \right] = \\ &= \frac{1}{6}(x_B - x_A) \left[3a(x_B + x_A)^2 - 6ax_Bx_A - 2a(x_B^2 + x_Bx_A + x_A^2) \right] = \\ &= \frac{1}{6}a(x_B - x_A) \left[3x_B^2 + 3x_A^2 + 6x_Bx_A - 6x_Bx_A - 2x_B^2 - 2x_Bx_A - 2x_A^2 \right] = \\ &= \frac{1}{6}a(x_B - x_A) \left[x_B^2 - 2x_Bx_A + x_A^2 \right] \\ &= \frac{1}{6}a(x_B - x_A)(x_B - x_A)^2 \\ &\Rightarrow \mathcal{A} = \frac{1}{6}a(x_B - x_A)^3 \quad (4)\end{aligned}$$

Osservazione: in questa situazione abbiamo supposto che la parabola sia convessa, quindi che i punti della retta compresi tra A e B abbiano ordinata maggiore o uguale dei corrispondenti punti della parabola (come si vede dalla figura iniziale); per questo motivo nel calcolo dell'integrale abbiamo posto $r(x) - p(x)$; in caso contrario è sufficiente porre $p(x) - r(x)$, e si ottiene con passaggi analoghi:

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \frac{1}{6}a(x_A - x_B)^3$$

Come caso generale si può utilizzare il valore assoluto:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{6}a|x_B - x_A|^3$$