I LOGARITMI

Definizione

*Il **logaritmo** c è l'esponente da dare alla base a per ottenere come risultato l'argomento b.*

$$log_a(b) = c \Leftrightarrow b = a^c$$

Con le condizioni d'esistenza:

- Per la base: $a > 0 \wedge a \neq 1$
- Per l'argomento: $b > 0$

Alcuni esempi:

- $log_2(32) = c \quad \Rightarrow \quad 32 = 2^c \quad \Rightarrow \quad c = 5$
- $log_2(64) = 6$
- $log_7(49) = 2$
- $log_3(1) = 0$
- $log_{12}(0)$ … *non esiste*!
- $log_4\left(\frac{1}{4}\right) = -1$
- $log_3(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$
- $log_1(3)$ … *non esiste*!

Analogamente possiamo anche calcolare la base o l'argomento.

- $log_3(x) = 2 \quad \Rightarrow x = 3^2 \quad \Rightarrow \quad x = 9$
- $log_x(81) = 4 \quad \Rightarrow 81 = x^4 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[4]{81} = 3$

Logaritmi particolari senza base (per convenzione):

- *logaritmo decimale* $\quad log(x) = log_{10}(x)$
- *logaritmo naturale* $\quad ln(x) = log_e(x) \qquad e \approx 2,71$ è la *costante di Nepero*.

La funzione logaritmica

La funzione $f(x) = log_a(x)$ è una funzione che ha le seguenti proprietà:

Per ogni $a > 0 \quad \wedge \quad a \neq 1$

- Il Dominio è $D = \{x > 0\}$
- Il Codominio è tutto l'insieme $\mathbb{R}$.
- È monotòna (sempre crescente o decrescente)
- È iniettiva: $log_a(x) = log_a(y) \Leftrightarrow x = y$
- Possiede uno zero in $x = 1$.

prof Caroselli

Se in particolare: $0 < a < 1$

- $log_a(x)$ è decrescente: $log_a(x) < log_a(y) \Leftrightarrow x > y$
- $log_a(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1,$ e $log_a(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Se invece: $a > 1$

- $log_a(x)$ è crescente: $log_a(x) < log_a(y) \Leftrightarrow x < y$
- $log_a(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1,$ e $log_a(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Proprietà dei logaritmi

Dalla definizione seguono due importanti identità:

$$log_a(a^c) = c \qquad\qquad a^{log_a(b)} = b$$

Casi particolari (che seguono sempre dalla definizione):

$$log_a(1) = 0 \qquad\qquad log_a(a) = 1 \qquad\qquad log_a\left(\frac{1}{a}\right) = -1$$

Ecco infine alcune proprietà generali (che seguono dalla definizione e dalle proprietà delle potenze).

Proprietà	**Esempio**
$log_a(x) + log_a(y) = log_a(x \cdot y)$	$log_9(2) + log_9(5) = log_9(10)$
$log_a(x) - log_a(y) = log_a\left(\frac{x}{y}\right)$	$log_7(30) - log_7(6) = log_7(5)$
$n \cdot log_a(x) = log_a(x^n)$	$2 \cdot log_3(5) = log_3(25)$
$\frac{log_a(x)}{n} = log_a(\sqrt[n]{x})$	$\frac{log_5(8)}{3} = log_5(2)$
$log_a\left(\frac{n}{d}\right) = -log_a\left(\frac{d}{n}\right)$	$log_2(3) = -log_2\left(\frac{1}{3}\right)$
$log_a(b) = \frac{1}{log_b(a)}$	$log_3(5) = \frac{1}{log_5(3)}$
$log_a(b) = log_{a^n}(b^n)$	$log_2(3) = log_8(27)$
$log_a(b) \cdot log_b(c) = log_a(c)$	$log_2(3) \cdot log_3(5) = log_2(5)$
$log_a(b) = \frac{log_c(a)}{log_c(b)}$	$log_3(7) = \frac{log(7)}{log(3)}$ (in questo es. $c = 10$)

prof Caroselli