LE FUNZIONI

Introduzione

« Una funzione è una corrispondenza tra la x e la y,

in cui ad ogni valore della x corrisponde uno ed un solo valore della y »

La x è una *variabile indipendente*, perché la possiamo scegliere noi; la y è al contrario una *variabile dipendente*, perché dipende dalla x che abbiamo scelto.

Una funzione si indica con una lettera minuscola in corsivo, in genere f. Il risultato di una funzione rispetto ad x, si indica con $f(x)$ e si chiama **immagine** di x, in quanto rispecchia la x che abbiamo scelto; questo valore corrisponde ad y; per questo vale sempre l'uguaglianza:

$$y = f(x)$$

Quindi y è uguale all'immagine di x.

Ogni volta che voglio trovare un punto nel piano cartesiano, devo trovare una coppia di coordinate $(x;\ y)$ tramite la tabella delle coordinate.

Esempi di funzioni

(i numeri assegnati a sinistra, alla x o alla y, sono casuali)

Primo esempio:

$$f(x) = \frac{x+5}{3}$$

1. Conosco la x, devo trovare la y: basta sostituire il valore al posto delle x della funzione.

Ecco alcuni casi:

$f(0) =\ ...\ \rightarrow$ se $x = 0$ allora devo calcolare $y = f(0)$ $\quad f(0) = \frac{0+5}{3} = \frac{5}{3}$ $\quad \rightarrow y = \frac{5}{3}$

$f(1) =\ ...\ \rightarrow$ se $x = 1$ allora devo calcolare $y = f(1)$ $\quad f(0) = \frac{1+5}{3} = \frac{6}{3} = 2$ $\quad \rightarrow y = 2$

$f(2) =\ ...\ \rightarrow$ se $x = 2$ allora devo calcolare $y = f(2)$ $\quad f(2) = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$ $\quad \rightarrow y = \frac{7}{3}$

$f(8) =\ ...\ \rightarrow$ se $x = 8$ allora devo calcolare $y = f(8)$ $\quad f(8) = \frac{8+5}{3} = \frac{13}{3}$ $\quad \rightarrow y = \frac{13}{3}$

2. Conosco la y, devo trovare la x: bisogna risolvere un'equazione.

Ecco alcuni casi (il primo svolto più in dettaglio, gli altri in modo schematico):

$$f(...) = 0$$

se $y = 0$ allora devo trovare x, affinché $f(x) = 0$; imposto l'equazione:

$$\frac{x+5}{3} = 0$$

Moltiplichiamo per 3 a sinistra e a destra, per togliere il denominatore

$$x + 5 = 0$$

È di primo grado, quindi separiamo i termini con la x da quelli senza la x

$$x =- 5$$

Quindi se $y = 0$ abbiamo una soluzione corrispondente: $x =- 5$.

Analogamente:

$f(...) = 1 \rightarrow$ se $y = 1$ allora devo calcolare $f(x) = 1$ $\quad \frac{x+5}{3} = 1 \rightarrow x + 5 = 3 \quad \rightarrow x =- 2$

$f(...) = 2 \rightarrow$ se $y = 2$ allora devo calcolare $f(x) = 2$ $\quad \frac{x+5}{3} = 2 \rightarrow x + 5 = 6 \quad \rightarrow x = 1$

$f(...) =- 5 \rightarrow$ se $y =- 5$ allora devo calcolare $f(x) =- 5$ $\quad \frac{x+5}{3} =- 5 \rightarrow x + 5 =- 15 \rightarrow x =- 20$

Secondo esempio

$$f(x) = x^2 + 4x$$

1. 2.1 Conosco la x, devo trovare la y: basta sostituire il valore al posto delle x della funzione.

Ecco alcuni casi:

$f(0) = \ ... \rightarrow$ Calcoliamo $y = f(0)$ $\quad f(0) = (0)^2 + 4(0) = 0 + 0 = 0 \quad \rightarrow y = 0$

$f(-1) = \ ... \rightarrow$ Calcoliamo $y = f(-1)$ $\quad f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) = 1 - 4 =- \rightarrow y =- 3$

$f(3) = \ ... \rightarrow$ Calcoliamo $y = f(3)$ $\quad f(3) = (3)^2 + 4(3) = 9 + 12 = 21 \quad \rightarrow y = 21$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ ... \rightarrow$ Calcoliamo $y = f\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} \quad \rightarrow y = \frac{9}{4}$

2. 2.2 Conosco la y, devo trovare la x: bisogna risolvere un'equazione.

Ecco alcuni casi, svolti più in dettaglio

$$f(...) = 5$$

se $y = 5$ allora: $f(x) = 5$

$$x^2 + 4 = 5$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

È di II grado, quindi scomponiamo in fattori (oppure il delta e la formula)

$$(x - 1)(x + 5) = 0$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$x + 5 = 0 \rightarrow x = - 5$$

Quindi se $y = 5$ abbiamo due soluzioni corrispondenti: $x = 1$ e $x = - 5$.

$$-----—----$$

$$f(...) = - 4$$

Devo risolvere l'equazione: $f(x) = - 4$

$$x^2 + 4 = - 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

È di II grado, quindi calcoliamo il delta e la formula (oppure scomponiamo in fattori)

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-4}{2} = - 2$$

Quindi se $y = - 4$ abbiamo una soluzione corrispondente: $x = - 2$.

$$-----—----$$

$$f(...) = - 7$$

Devo risolvere l'equazione: $f(x) = - 7$

$$x^2 + 4 = - 7$$

$$x^2 + 4x + 7 = 0$$

È di II grado, quindi calcoliamo il delta e la formula (oppure scomponiamo in fattori)

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 16 - 28 = - 12 \rightarrow Impossibile!!!$$

Quindi se $y = - 7$ l'equazione è impossibile, quindi non abbiamo alcuna soluzione per x.

Il Dominio

In una funzione la x è una *variabile indipendente*, in quanto può essere scelta in modo arbitrario; ma dobbiamo far attenzione a non provocare calcoli impossibili! Ci sono numeri buoni (la maggior parte) che possiamo sostituire alla x, e numeri non buoni, che portano ad operazioni impossibili.

Per controllare quali numeri vanno bene e quali no, dobbiamo studiare le **condizioni di esistenza** (abbreviate **C.E.**), che dipendono dal tipo di funzione e dal tipo di operazioni presenti.

L'insieme di tutti i numeri buoni, che è possibile sostituire alla x perché rispettano le C.E., si chiama il **Dominio** della funzione.

Al contrario l'insieme di tutte le immagini (quindi di tutti i risultati y che posso ottenere) si chiama **Codominio**.

Studiare il Dominio di una funzione è un passo fondamentale, quello che influenza tutto lo studio della funzione, e si svolge determinando le condizioni di esistenza. Come si fa? Dipende dal tipo di funzione, o meglio dal tipo di operazioni che coinvolgono la x. Le regole principali sono:

- Se in una funzione c'è una **frazione** con la x al denominatore, allora il denominatore deve esser *diverso da zero*.
- Se in una funzione c'è una **radice di indice pari**, con la x al radicando, allora il radicando deve esser *maggiore o uguale a zero*.
- Se ci sono più operazioni di questo tipo, si mettono tutte le condizioni corrispondenti.
- Se non c'è nessuna di queste operazioni, il Dominio è tutto l'insieme dei numeri Reali, indicato con $\mathbb{R}$.

A volte capita che alcune condizioni siamo superflue o ridondanti, quindi possiamo evitare di scriverle.

Esempi di calcolo di Domini

Esempio 1

$$f(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$$

In questa funzione è presente frazione con la x al denominatore. La condizione è quindi:

$$x^2 - 9 \neq 0$$

Tale condizione corrisponde ad un'equazione di secondo grado, che si può risolvere facilmente con le scomposizioni o anche con la formula: la sua soluzione è $x \neq -3$ e $x \neq +3$.

Di conseguenza il Dominio di questa funzione è:

$$D = \{x \neq -3 \ e \ x \neq +3\}$$

Esempio 2

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{8}$$

In questa funzione sono presenti due operazioni problematiche: la radice quadrata e la frazione; tuttavia nel denominatore non è presente la x, quindi non serve porre alcuna condizione. Studiamo quindi solo la condizione della radice:

$$x + 1 \geq 0$$

Essendo una disequazione di primo grado, si risolve subito: la sua soluzione è $x \geq -1$.

Di conseguenza il Dominio di questa funzione è:

$$D = \{x \geq -1\}$$

Esempio 3

$$f(x) = x^2 + 2x - \sqrt{7}$$

In questa funzione è presente una radice quadrata, ma senza la x al suo interno, di conseguenza non serve porre alcuna condizione. Non essendoci altre operazioni problematiche, non serve mettere alcuna condizione.

Di conseguenza il Dominio di questa funzione è:

$$D = R$$

Esempio 4

$$f(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{x^2-2x}$$

In questa funzione sono presenti due operazioni problematiche: la radice quadrata e la frazione. Studiamo separatamente le due condizioni:

$$\left(5 - x \geq 0 \quad x^2 - 2x \neq 0\right)$$

La prima condizione è quella della radice quadrata: svolgendo i calcoli e facendo attenzione al cambio di segno, la sua soluzione è $x \leq 5$; la seconda è quella del denominatore della frazione: la sua soluzione è $x \neq 0$ e $x \neq 2$.

Di conseguenza il Dominio di questa funzione è:

$$D = \{x \leq 5 \;\; e \;\; x \neq 0 \;\; e \;\; x \neq 2\}$$

Esempio 5

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt[3]{4x - 7}$$

In questa funzione sono presenti due radici: una radice quadrata e una radice cubica; fortunatamente la radice cubica con ha condizioni di esistenza (può anche esser negativa) quindi l'unica condizione è quella della prima radice:

$$x^2 + 3x \geq 0$$

Questa è una disequazione di secondo grado: dobbiamo trovare le soluzioni e studiare la tabella del segno. Scomponendo in fattori otteniamo:

$$x(x + 3) \geq 0$$

Quindi i due fattori da studiare sono:

- $x \geq 0$

- $x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$

Studiamo la tabella del segno, in cui riportiamo i più e i meno secondo questi due fattori.

	-3	0	
$fattore\ 1$	$-$	$-$	+
$fattore\ 2$	$-$	+	+
$f'(x)$	+	$-$	+

Di conseguenza il Dominio di questa funzione è:

$$D = \{x \leq -3 \ e \ x \geq 0\}$$