ESPONENZIALI

Introduzione

La potenza è l'operazione con la quale si moltiplica più volte uno stesso numero per se stesso.

$$3^5 = 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3$$

Nella potenza b^n la lettera **b** al centro è chiamata base della potenza e rappresenta il numero che deve esser moltiplicato per se stesso.
Mentre la lettera **n** in alto è chiamata esponente e indica per quante volte dobbiamo moltiplicare la base b per se stessa.

Proprietà delle potenze

Queste regole già le abbiamo studiate, quindi già dovreste saperle tutte, ma per sicurezza le ripassiamo…
Regola del segno:

- *Se l'esponente n è pari, allora il risultato di b^n è sempre positivo o nullo*: se b è positivo o negativo, b^n è positivo; se b è zero, b^n è zero.
- *Se l'esponente n è dispari, allora il risultato di b^n ha lo stesso segno della base b*: se b è positivo, b^n è positivo; se b è negativo, b^n è negativo; se b è zero, b^n è zero.

Regole delle operazioni tra le potenze:

Regola	*Formula*	*Esempio*
Prodotto di potenze con la stessa base. *È una potenza avente per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.*	$b^m \bullet b^n = b^{m+n}$	$5^4 \bullet 5^3 = 5^7$
Prodotto di potenze con lo stesso esponente. *È una potenza avente per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente.*	$a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n$	$6^3 \bullet 2^3 = 12^3$
Quoziente di potenze con la stessa base. *È una potenza avente per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.*	$b^m : b^n = b^{m-n}$ $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$	$\frac{9^{14}}{9^{12}} = 9^2$
Quoziente di potenze con lo stesso esponente. *È una potenza avente per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente.*	$a^n : b^n = (a : b)^n$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{20^8}{10^8} = 2^8$
Potenza di una potenza. *È una potenza avente per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.*	$\left(b^n\right)^p = b^{n \bullet p}$	$\left(3^5\right)^2 = 3^{10}$
Radice di una potenza. *È una potenza avente per base la stessa base e per esponente il quoziente tra esponente e indice della radice.*	$\sqrt[i]{b^n} = \frac{(b)^n}{i}$	$\sqrt[3]{2^{15}} = (2)^5$
Potenza con esponente zero. *Ogni potenza con esponente 0 vale 1.*	$b^0 = 1$	$99^0 = 1$
Potenza con esponente negativo. *Ogni potenza con esponente negativo corrisponde ad una potenza con base reciproca ed esponente positivo.*	$b^{-n} = \left(\frac{1}{b}\right)^n$ $\left(\frac{b}{c}\right)^{-n} = \left(\frac{c}{b}\right)^n$	$10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$

Funzione esponenziale

La funzione esponenziale è una potenza in cui la base rimane costante e l'esponente variabile in funzione di x. La funzione esponenziale più semplice è la potenza:

$$f(x) = b^x$$

In cui la base b è un numero positivo e diverso da 0 e 1, mentre l'esponente x può esser un qualunque numero reale. La base è un numero fissato, noto, mentre l'esponente è incognito e può variare.

Non confondiamo l'esponenziale con le funzioni polinomiali (come la parabola):

- Nella funzione esponenziale la base è nota e l'esponente incognito: $2^x, 3^x, \left(\frac{2}{3}\right)^x$ e così via…
- Nella funzione polinomiale la base è incognita e l'esponente è noto: $x,\ x^2,\ x^3,\ x^4$ …

I valori di una funzione esponenziale si possono studiare con un'equazione nel piano:

$$y = b^x$$

Questa funzione ha un grafico molto particolare, che dipende da quale base scegliamo.

- Se la base è un numero maggiore di 1, allora è una funzione crescente: all'aumentare della x aumenta anche la y; inoltre maggiore è la base, maggiore è la velocità di crescita.
- Se la base è un numero compreso tra 0 e 1, allora è una funzione decrescente: all'aumentare della x diminuisce la y; inoltre minore è la base, maggiore è la velocità di decrescita.

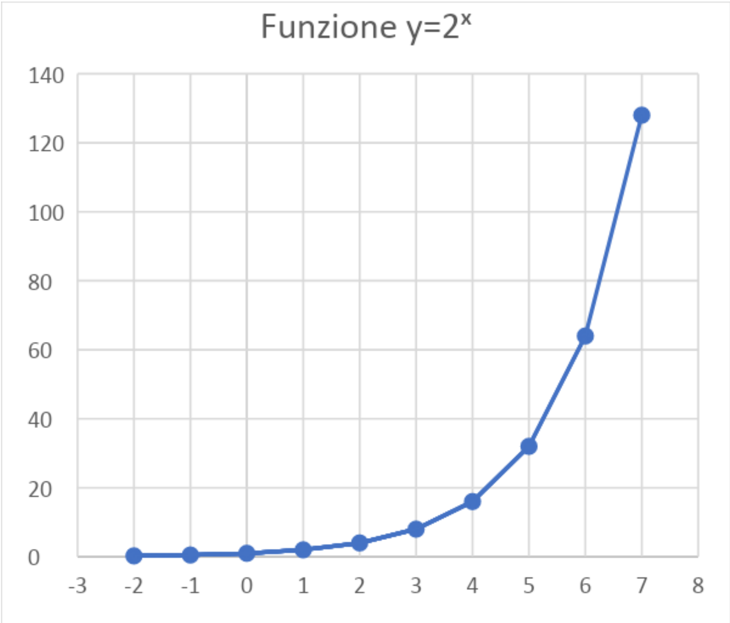
La funzione esponenziale è sempre positiva! Non può esser mai zero, né valere un numero negativo.

Per rappresentare graficamente la funzione è sufficiente calcolare la tabella tra x e y.

Esempio:

Studiamo la funzione $y = 2^x$. Costruiamo la tabella, assegnando alcuni valori alla x:

x	2^x	$y = 2^x$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	0,25
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	0,5
0	$2^0 = 1$	1
1	$2^1 = 2$	2
2	$2^2 = 4$	4
3	$2^3 = 8$	8
4	$2^4 = 16$	16
5	$2^5 = 32$	32
6	$2^6 = 64$	64
7	$2^7 = 128$	128



Come vedete la y ha sempre valori positivi e cresce in modo esponenziale (appunto…) in quanto inizialmente è molto piccola, ma poi inizia a crescere improvvisamente e sempre di più.

Esercizio: fate la prova a disegnare la funzione 3^x e $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ per vedere come cambia il grafico.

Equazioni esponenziali

Un'equazione esponenziale è una normale equazione in cui però l'incognita compare ad esponente, invece che alla base (come al contrario avviene nei polinomi).

Quindi l'obiettivo di un'equazione esponenziale è scoprire il valore da dare all'incognita che sta all'esponente.

Le equazioni esponenziali si dividono in due gruppi:

- quelle che hanno solo uno o due termini, che sono chiamate elementari;
- quelle che hanno tre o più termini, che sono chiamate non elementari.

Ogni termine è una potenza o un prodotto di potenze; i vari termini sono separati da operazioni di addizione e sottrazione, o dall'uguale, come in un polinomio, per cui è facile capire quanti termini ha un'equazione.

Esempi:

$10^{3x-4} = 0$ possiede un solo termine

$\frac{2^x}{3^{x+1}} = \sqrt[4]{6^{2x}}$ possiede 2 termini

$2 + 5^{x+4} = 4^x - 3^{x^2-x}$ possiede 4 termini

$x^2 - 3^x = 5x + \sqrt{x}$ non è un'equazione esponenziale!!! Ma è un'equazione mista.

Equazioni esponenziali elementari

Si risolvono portando separando i due membri, uno a sinistra e uno a destra dell'uguale (cambiando il segno di quello che spostiamo), fino ad arrivare alla forma: $b^x = n$, dove la base b deve esser positiva.

- Se $n = 0$, allora è impossibile: nessun esponenziale può esser uguale a zero.
- Se $n < 0$, allora è impossibile: nessun esponenziale può esser uguale a un numero negativo.
- Se $n > 0$, allora è possibile risolverla.

Per risolvere l'equazione dobbiamo trasformare tutte le espressioni presenti in modo da ottenere due potenze, possibilmente con la stessa base. Per fare questo dobbiamo applicare le regole delle potenze viste in precedenza.

Una volta ottenute due potenze con la stessa base, cancelliamo le basi e studiamo solo gli esponenti.

Esempio:

$$\frac{4^x}{2} = 2\sqrt{8}$$

Trasformiamo tutti i numeri in potenze di 2:

$$\frac{(2^2)^x}{2} = 2 \bullet \sqrt{2^3}$$

Applichiamo le proprietà delle potenze:

$$\frac{2^{2x}}{2^1} = 2^1 \bullet \frac{2^3}{2}$$

$$2^{2x-1} = 2^{1+\frac{3}{2}}$$

Ora abbiamo ottenuto due potenze con la stessa base. Cancelliamo quindi le basi e studiamo gli esponenti:

$$2x - 1 = 1 + \frac{3}{2}$$

È diventata una semplice equazione di primo grado, che ha come soluzione $x = \frac{7}{4}$ (gli ultimi calcoli sono semplici).

Equazioni esponenziali non elementari

Si risolvono portando tutti i membri a sinistra dell'uguale (cambiando il segno di quelli che spostiamo) e lasciando zero a destra.

Ogni termine esponenziale deve esser scomposto il più possibile (con passaggi opposti a quelli del caso precedente) in modo da ottenere potenze con piccole basi e piccoli esponenti.

N.B.: vanno scomposti solo gli esponenziali, quindi quelli che hanno la x ad esponente! I numeri che non hanno la x ad esponente non vanno scomposti.

Cerchiamo di individuare il termine esponenziale più semplice, che sia contenuto in tutti gli altri e sostituiamolo con la lettera ausiliaria **t**. Tutti gli altri esponenziali devono esser sostituiti in funzione di t.

Se abbiamo fatto bene i passaggi, ora l'equazione non ha più l'incognita x, ma la t, ed è diventata un'equazione classica (di primo o secondo grado). Possiamo risolverla per trovare le soluzioni di t.

Una volta trovate le soluzioni di t, risaliamo a quali valori di x corrispondono alle t trovate.

Esempio:

Risolviamo l'equazione:

$$4^x + 2^{x+2} - 8 = 2^{x-1} + 3$$

Per prima cosa spostiamo tutto a sinistra e scomponiamo gli esponenziali (quelli con la x ad esponente). L'equazione è diventata:

$$2^{2\bullet x} + 2^x \cdot 2^2 - 8 - \frac{2^x}{2} - 3 = 0$$

L'esponenziale comune che si ripete dappertutto è 2^x, quindi poniamo: $2^x = t$, e otteniamo la nuova equazione:

$$t^2 + 4t - 8 - \frac{t}{2} - 3 = 0$$

Moltiplichiamo tutto per due:

$$2t^2 + 8t - 16 - t - 6 = 0$$

Svolgiamo i calcoli:

$$2t^2 - 7t - 22 = 0$$

Questa equazione è di 2° grado e possiamo risolverla con la formula risolutiva (che ricorderete benissimo). Le soluzioni sono:

$$t_1 =+ 2 \text{ e } t_2 = \frac{-11}{2}$$

Da cui, confrontando con la condizione $2^x = t$, otteniamo due possibilità:

- $2^x = 2 \quad \rightarrow \quad x = 1$
- $2^x = \frac{-11}{2} \quad \rightarrow \quad impossibile\ perché$ è $un\ numero\ negativo$!

Quindi la soluzione finale dell'equazione è $x = 1$.