

LE DERIVATE

Definizioni e Regole

Rapporto incrementale (coefficiente angolare della retta passante per due punti della funzione)	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
Derivata (coefficiente angolare della retta tangente in un punto alla funzione)	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Derivate di funzioni

Funzione	Derivata elementare	Derivata composta
Costante	$D[k] = 0$	
Potenza	$D[x^n] = n x^{n-1}$	$D[f(x)^n] = n f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
Seno	$D[\sin(x)] = \cos(x)$	$D[\sin(f(x))] = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$
Coseno	$D[\cos(x)] = -\sin(x)$	$D[\cos(f(x))] = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$
Tangente	$D[\tan(x)] = 1 + \tan^2(x)$	$D[\tan(f(x))] = (1 + \tan^2(f(x))) \cdot f'(x)$
Arcoseno	$D[\arcsin(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D[\arcsin(f(x))] = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
Arcotangente	$D[\arctan(x)] = \frac{1}{1+x^2}$	$D[\arctan(f(x))] = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$
Esponenziale	$D[a^x] = a^x \ln(a)$	$D[a^{f(x)}] = a^{f(x)} \ln(a) \cdot f'(x)$
Logaritmo	$D[\log_a(x)] = \frac{1}{x \ln(a)}$	$D[\log_a(f(x))] = \frac{f'(x)}{f(x) \ln(a)}$

Regole di derivazione

Funzione	Regola
Somma	$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
Differenza	$D[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$
Prodotto	$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$
Quoziente	$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$
Composta	$D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Inversa	$D[f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'(x)}$ con $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$

Retta tangente

<i>Retta tangente alla funzione in un suo punto P</i>	$y - y_p = m(x - x_p)$ essendo: $y_p = f(x_p)$ e $m = f'(x_p)$
---	--

Derivabilità

Una funzione $f(x)$ è **derivabile** in un punto x_0 se:

1. $f(x)$ è continua in x_0 ;
2. $f'(x)$ è continua in x_0 .

Ossia se \exists finito $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'(x_0)$.

L'insieme delle funzioni derivabili si indica con C^1 .

Punti di non derivabilità

Sia $x_0 \in D$, tale che $f(x)$ è continua ma non derivabile in x_0 ; allora x_0 si chiama:

1. punto **angoloso**: se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$, ma almeno uno è finito.
2. punto di **cuspidè**: se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = -\infty$, o viceversa.
3. punto di **flesso a tangente verticale**: se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \pm \infty$.

Ogni punto $x \in D$ in cui la funzione è derivabile e la derivata è nulla si chiama **punto stazionario**.

Teorema di "Rolle"

Ipotesi: data una funzione $f(x)$ tale che:

1. $f \in C^0[a, b]$;
2. $f \in C^1(a, b)$;
3. $f(a) = f(b)$;

Tesi: allora: $\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$.

Teorema di "Lagrange"

Ipotesi: data una funzione $f(x)$ tale che:

1. $f \in C^0[a, b]$;
2. $f \in C^1(a, b)$;

Tesi: allora: $\exists c \in (a, b): f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Osservazione: il teorema di Lagrange è un caso generale del teorema di Rolle.

Teorema di "Cauchy"

Ipotesi: date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tali che:

1. $f, g \in C^0[a, b]$;
2. $f, g \in C^1(a, b)$;
3. $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$;

Tesi: allora: $\exists c \in (a, b): \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Teorema di "de l'Hospital"

Ipotesi: date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tali che:

1. $f, g \in C^0[a, b]$
2. $f, g \in C^1(a, b)$;
3. $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$;
4. $\exists x_0 \in (a, b): \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,
oppure $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$

Tesi: allora: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.