# Tecniche di scomposizione in fattori dei polinomi

Dato un qualunque polinomio, è possibile studiare se può esser scritto come il prodotto di più polinomi più semplici, di grado inferiore. Per fare ciò, è necessario seguire le varie regole nel seguente ordine:

## 1. Effettuare un raccoglimento a fattor comune totale

*Se tutti i termini del polinomio possiedono uno o più fattori in comune, tali fattori si possono scrivere una sola volta, e possono esser moltiplicare per il polinomio ridotto, ossia quello che si ottiene dividendo ogni termine del polinomio per il termine comune.*
Esempi:

- $ax^2 + b^3x - a^2bx = x\cdot(ax + b^3 - a^2b)$
- $4a^2bc^4 - 10b^3c^2 - 6a^3b^3c^2 + 12ab^2c^3 = 2bc^2\cdot(2a^2c^2 - 5b^2 - 3a^3b^2 + 6abc)$
- $24x^6y^5z^{10} - 30x^2y^4z^7 = 6x^2y^4z^7\cdot(4x^4yz^3 - 5)$

## 2. Studiare, a seconda del numero di termini, la presenza di scomposizioni particolari

Dopo aver controllato la possibilità di un raccoglimento totale, si analizza il numero di termini del polinomio per valutare quale tecnica si possa applicare. Vediamo i diversi casi:

### a) 2 termini – Binomi

- Differenza di due quadrati $A^2 - B^2 \to (A + B)\cdot(A - B)$
- Somma di due quadrati $A^2 + B^2 \to$ **non si può scomporre!!!**
- Differenza di due cubi $A^3 - B^3 \to (A - B)\cdot(A^2 + AB + B^2)$
- Somma di due cubi $A^3 + B^3 \to (A + B)\cdot(A^2 - AB + B^2)$

### b) 3 termini – Trinomi

- Quadrato di un binomio (termini concordi) $A^2 + 2AB + B^2 \to (A + B)^2$
- Quadrato di un binomio (termini discordi) $A^2 - 2AB + B^2 \to (A - B)^2$
- Falso quadrato (termini concordi) $A^2 + AB + B^2 \to$ **non si può scomporre!!!**
- Falso quadrato (termini discordi) $A^2 - AB + B^2 \to$ **non si può scomporre!!!**
- Trinomio speciale (somma e prodotto) $x^2 + sx + p = x^2 + (a + b)x + (a \cdot b) \to (x + a)\cdot(x + b)$

### c) 4 termini – Quadrinomi

- Raccoglimento a fattor parziale $Ax + Bx + Ay + By \to (A + B)\cdot(x + y)$
- Cubo di un binomio (termini concordi) $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \to (A + B)^3$
- Cubo di un binomio (termini discordi) $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \to (A - B)^3$

### d) 6 termini

- Quadrato di un trinomio (termini concordi) $A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2AC \to (A + B + C)^2$
- Quadrato di un trinomio (term. discordi, 1° caso) $A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2BC + 2AC \to (A - B + C)^2$
- Quadrato di un trinomio (term. discordi, 2° caso) $A^2 + B^2 + C^2 - 2AB + 2BC - 2AC \to (A - B - C)^2$
- Quadrato di un trinomio (term. discordi, 3° caso) $A^2 + B^2 + C^2 + 2AB - 2BC - 2AC \to (A + B - C)^2$

### e) Altri casi

- Scomposizioni miste

in un polinomio generico si possono combinare le varie scomposizioni, ad esempio:

$$xA^2 + xB^2 + 2xAB + yA^2 - yB^2 = x(A + B)^2 + y(A + B)(A - B) \to (A + B)\cdot(Ax + Bx + Ay - By)$$

## 3. Applicare il teorema e la regola di Ruffini

Se, dopo aver provato i vari casi, si ha ancora un polinomio di grado superiore al primo, allora si può applica la regola Ruffini, che permette di svolgere una divisione tra e il polinomio in questione (il dividendo) e un binomio di primo grado (il divisore), per ottenere una scomposizione. Vediamo un esempio:

### a) Ricerca degli zeri[1]

- Analizziamo il polinomio P(x) $= x^3 - 2x^2 + 3x - 6$
  - *esso può teoricamente avere i seguenti "zeri": $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 6$ (tutti i divisori del termine noto);*
  - *di questi, al massimo soltanto 3 saranno effettivamente degli zeri, in quanto il polinomio ha grado 3.*
- Cerchiamo uno "zero" del polinomio, partendo da quelli più semplici:
  - $P(1) = (1)^3 - 2(1)^2 + 3(1) - 6 = -4$ *quindi +1 non è uno zero*
  - $P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 3(-1) - 6 = -12$ *quindi −1 non è uno zero*
  - $P(2) = (2)^3 - 2(2)^2 + 3(2) - 6 = 0$ *quindi +2* ***è uno zero***

### b) Applichiamo la regola di Ruffini[2]

- Si crea una tabella, inserendo nella prima riga i coefficienti del polinomio (colore verde);
- i coefficienti con la x si inseriscono nelle colonne centrali, il termine noto nella colonna esterna a destra;
- nella seconda riga, nella colonna esterna di sinistra, si sistema lo "zero" che abbiamo trovato (colore rosso);
- si inizia ad operare, riscrivendo il primo coefficiente (1 verde) nella terza riga (in blu);

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −2 | 3 | −6 |
| 2 | | | | |
| | 1 | | | |

- si moltiplica lo "zero" (2 rosso) per il coefficiente nella terza riga (1 blu);
- il prodotto (2 giallo) si scrive sotto al secondo coefficiente (−2 verde), nella seconda colonna;
- si opera una somma algebrica nella colonna del secondo coefficiente e il risultato (0 blu) si scrive nella terza riga;

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −2 | 3 | −6 |
| 2 | | 2 | | |
| | 1 | 0 | | |

- si moltiplica lo "zero" (2 rosso) per il nuovo risultato ottenuto (0 blu);
- il prodotto (0 giallo) si scrive sotto al terzo coefficiente (3 verde), nella terza colonna;
- si opera una somma algebrica nella colonna del terzo coefficiente e il risultato (3 blu) si scrive nella quarta riga;

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −2 | 3 | −6 |
| 2 | | 2 | 0 | |
| | 1 | 0 | 3 | |

- si moltiplica il solito "zero" (2 rosso) per il l'ultimo risultato ottenuto (3 blu);
- il prodotto (6 giallo) si scrive sotto al termine noto (−6 verde), nella quarta colonna;
- si opera una somma algebrica nella colonna esterna a destra;
- il risultato (0 grigio) si scrive nella terza riga e corrisponde all'eventuale **resto della divisione**;

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −2 | 3 | −6 |
| 2 | | 2 | 0 | 6 |
| | 1 | 0 | 3 | 0 |

- i numeri in blu nella terza riga sono i **coefficienti del polinomio quoziente**.

$Q(x) = 1x^2 + 0x + 3$

### c) Scomponiamo in fattori il polinomio iniziale (se il resto è zero)

- Il primo fattore (il divisore) deve:
  - *esser un binomio di primo grado con la stessa incognita (x)*
  - *avere il coefficiente della x unitario*
  - *avere lo stesso zero del polinomio iniziale (2)*
  - *il polinomio quindi sarà:* $D(x) = x - 2$
- Il secondo fattore (il quoziente) deve:
  - *essere un polinomio di grado inferiore di 1 al polinomio iniziale (3 – 1 = 2)*
  - *esser nella stessa incognita (x)*
  - *aver per coefficienti i numeri trovati con la regola di Ruffini, (escluso l'ultimo numero, che è il resto)*
  - *il polinomio quindi sarà:* $Q(x) = 1x^2 + 0x + 3$ *ovvero:* $Q(x) = x^2 + 3$
- Possiamo scrivere la seguente scomposizione, unendo i due fattori in un prodotto:

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \rightarrow (x - 2)\cdot(x^3 + 3)$$

---

[1] *Uno "**zero**" del polinomio è un numero qualunque che, assegnato all'incognita, rende nullo il polinomio. Generalmente uno zero si trova cercando i divisori del termine noto.*
[2] *I colori nelle tabelle sono puramente indicativi, servono solo ad individuare meglio i vari numeri.*